Probabilités

I. Expérience aléatoire, événement, probabilité.

A. *Expérience aléatoire.*

<u>Vocabulaire</u> :

- Une expérience aléatoire est une expérience dont les résultats (ou issues) sont soumis au hasard.
- On appelle univers, Ω, l'ensemble de toutes les issues.
- Un événement est un sous-ensemble de Ω, c'est à dire qu'il est constitué d'aucune, une ou plusieurs issues.

B. *Événements.*

<u>Définition</u> :

- Des événements A et B sont incompatibles si leur intersection est vide, ils n'ont alors pas d'issue en commun, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$.
- Des événements A et B sont contraires si il sont incompatibles et si leur réunion forme Ω. On note alors $B = \overline{A}$.

<u>Définition</u> :

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Soient les événements $A_1, \ldots, A_n$. Alors ils forment un système complet d'événements si :

- les événements sont deux à deux incompatibles,
- leur réunion vaut Ω.

On dit aussi que les événements forment une partition de l'univers.

C. *Probabilités.*

<u>Définition</u>:

Une probabilité P est une fonction définie par $P:\begin{cases} T_{\Omega} \to [0\,;1] \\ A \mapsto P(A) \end{cases}$ où T_{Ω} est un ensemble d'événements de Ω bien choisi, telle que :

- $P(\Omega)=1$,
- Pour tout événement A et B incompatibles: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

<u>Définition</u>:

- Un événement dont la probabilité est égale à 0 est appelé événement impossible.
- Un événement dont la probabilité est égale à 1 est appelé événement certain.
- Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité.

D. *Exemple.*

Une des difficultés lorsqu'on fait intervenir des probabilités est de trouver un modèle adapté à la situation sachant que l'estimation des probabilités se fait à la dernière étape.

<u>Expérience aléatoire</u>:

Dans un jeu de 32 cartes, on note tire une carte au hasard et on note sa valeur et sa couleur. Une issue est par exemple (10 ;Cœur) ou notée encore 10 de Cœur.

<u>Événement</u>:

10C : « la carte tirée est le 10 de Coeur ». On a 10C = {(10 ;Cœur)}. C'est un événement élémentaire.

R : « la carte tirée est un roi ». On a R = {(R;Pique) ;(R;Cœur) ;(R;Carreau) ;(R;Trèfle)}. C'est un événement constitué de 4 issues.

Ce sont deux événements incompatibles mais pas contraires.

<u>Probabilité</u>:

Si on se place en situation d'équiprobabilité, $P(10\text{C})=\dfrac{1}{32}$

II. Calculs et premières propriétés.

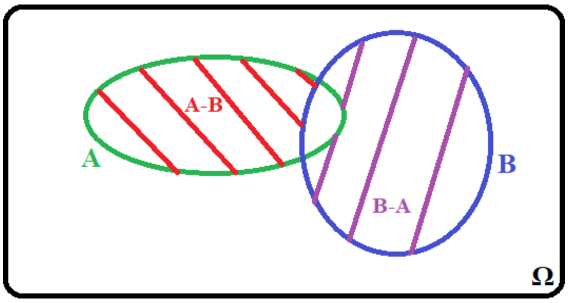
Propriété:

Soient A et B deux événements :

1. $P(\bar{A})+P(A)=1$,
2. $P(\emptyset)=0$,
3. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$,
4. Si $A\subset B$, $P(A)\leqslant P(B)$.

Démonstration:

1. $P(\bar{A})+P(A)=P(\bar{A}\cup A)=P(\Omega)=1$ car $\bar{A}$ et A sont incompatibles.
3. $A\cup B=(A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)$, de plus ces trois événements sont incompatibles.



$A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$

$B=(B\setminus A)\cup(A\cap B)$

D'où $P(A)=P(A\setminus B)+P(A\cap B)$

$P(B)=P(B\setminus A)+P(A\cap B)$

$$\begin{aligned}P(A\cup B) &=P(A\setminus B)+P(A\cap B)+P(B\setminus A)\\ &=P(A)-P(A\cap B)+P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)\\ &=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\end{aligned}$$

Propriété:

Si les événements $A_1, \dots, A_n$ sont deux-à-deux incompatibles, alors :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)=P(A_1\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+\ldots+P(A_n)=\sum_{k=0}^{n} P(A_k) .$$

Démonstration: Utilisons une récurrence sur $n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$.

- Initialisation : $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$ par définition d'une probabilité.
- Hérédité: supposons que l'égalité soit vraie pour un certain rang $n\geqslant 2$.

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right)=P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\cup A_{n+1}\right)=P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)+P(A_{n+1})=\sum_{k=0}^{n} P(A_k)+P(A_{n+1})=\sum_{k=0}^{n+1} P(A_k)$$

Car $\bigcup_{k=0}^{n} A_k$ et A_{n+1} sont incompatibles.

Propriété:

Soit A un événement. En cas d'équiprobabilité, on a :

$$P(A)=\frac{nombre\ d'issues\ favorables}{nombre\ total\ d'issues}=\frac{card\ A}{card\ \Omega}\ .$$

Démonstration: On applique la propriété ci dessus aux événements élémentaires constituant A.

Propriété: *(formule des probabilités totales)*

Soit $n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$. Si les événements $A_1, \ldots, A_n$ forment un système complet d'événements. Alors pour tout événement B, on a : $P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(B\cap A_i)$.

Démonstration: Il suffit de remarquer que $B=B\cap\Omega=B\cap(\bigcup_{k=0}^{n} A_k)=\bigcup_{k=0}^{n}(B\cap A_k)$, puis que ces événements sont deux à deux incompatibles.

Exemple: Reprenons l'exemple ci-dessus.

- Pique, Coeur, Carreau, Trèfle forme un système complet d'événements,
- $P(Coeur)=\frac{card\ Coeur}{card\ \Omega}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$,
- $P(R)=P(R, Pique)+P(R, Coeur)+P(R, Carreau)+P(R, Trèfle)=\frac{4\times 1}{32}=\frac{1}{8}$.

III. Indépendance et probabilités conditionnelles.

Définition:

Soit A et B deux événements. On dit que A et B sont indépendants si $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

Exemple: Reprenons l'exemple ci-dessus.

$$P(Coeur \cap R)=\frac{1}{32} \quad \text{, et} \quad P(Coeur)\times P(R)=\frac{8}{32}\times\frac{4}{32}=\frac{1}{32} \quad .$$

Donc les événements Cœur et R sont indépendants (mais attention, ils ne sont pas incompatibles).

Définition:

Soit A et B deux événements tels que $P(B)>0$.

On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le nombre noté $P_B(A)$ (ou $P(A|B)$) :

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad .$$

Exemple: Reprenons l'exemple ci-dessus $P_V(Coeur)=\dfrac{P(V\cap Coeur)}{P(V)}=\dfrac{\frac{1}{32}}{\frac{4}{32}}=\dfrac{1}{4}$.

Propriété: Dans les conditions précédentes, P_B définie bien une nouvelle probabilité.

Démonstration:

- Soit un événement A, $P_B(A)$ est à valeur dans [0;1],
- $P_B(\Omega)=1$,
- Soient deux événements A et B incompatibles: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

Proposition:

Soit A et B deux événements tels que P(B) > 0.

A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A)=P(A)\Leftrightarrow P_A(B)=P(B)$.

Exercice:

On considère deux gènes a et b tel que la redondance de l'un d'entre eux (c'est-à-dire le fait de posséder aa ou bb) entraîne l'acquisition d'un caractère C. Anselme et Colette possèdent chacun la combinaison ab et attendent un enfant : il lui transmettrons chacun et indépendamment, soit le gène a, soit le gène b, avec la même probabilité (c'est-à-dire 1/2).

On considère les événements :

- A = « Colette transmet le gène a »,
- B = « Anselme transmet le gène b »,
- C = « L'enfant présente le caractère C ».

➔ Montrer que les événements A, B et C sont deux-à-deux indépendants.

➔ Montrer que $P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$.

Propriété: (Formule de Bayes simplifiée)

Soit A et B deux événements tels que P(A) > 0 et P(B) > 0, alors $P_B(A) = \dfrac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$.

Démonstration:

On a $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(B)$,

d'où $P_B(A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(B)} = \dfrac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$

Exercice:

- 60% des étudiants qui vont en TD obtiennent l'examen ;
- 10% des étudiants qui ne vont pas en TD obtiennent l'examen ;
- 70% des étudiants vont en TD.

➔ Quelle proportion des lauréats a séché les cours ?

Propriété:

Soient A et B deux événements tels que $A \subset B$ et $P(B) \neq 0$, alors : $P(A) = P(B) \times P_B(A)$.

Démonstration:

Comme $A \subset B$, on a $A \cap B = A$, d'où $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)}$.

<u>Exercice</u>:

Chez les papous, il y a les papous à poux et les papous pas à poux. La probabilité pour qu'un papou ait des poux vaut 0,1.

De plus, chez les papous, il y a les papous papas et les papous pas papas. La probabilité pour qu'un papou à poux soit papa vaut 0,6.

Or, chez les poux, il y a les poux papas et les poux pas papas : la probabilité pour qu'un papou à poux possède au moins un pou papa est de 0,8.

Enfin chez les papous pas papas à poux, la probabilité qu'aucun des poux ne soit papa est de 0,1.

- ➔ On tire au hasard un papou. Quelle est la probabilité pour que ce soit un papa papou à poux papa ?

IV. Variables aléatoires discrètes.

A. *Lois*

Définition:

Une variable aléatoire réelle X est une fonction définie sur T(Ω) et à valeur dans $\mathbb{R}$.

On note $X=k$, l'événement comprenant toutes les issues dont à l'image par X est égale à *k*.

On note $X\leqslant k$, l'événement comprenant toutes les issues dont l'image par X est inférieure ou égale à *k*. On définit de même les événements $X\geqslant k$, $k\leqslant X\leqslant k'$.

Remarque:

Dans le cas où Ω est un ensemble fini (de cardinal $m\in\mathbb{N}^*$), alors T(Ω) est l'ensemble des parties de Ω c'est à dire l'ensemble tous les événements contenant aucune, une ou plusieurs issues. Alors T(Ω) est fini aussi et $card(T(\Omega))=2^m$. Dans ce cas, la variable aléatoire ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Définition: (Loi d'une variable aléatoire discrète)

Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n\in\mathbb{N}^*$).

La loi de X est la donnée de $p_i=P(X=x_i)$ pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$.

Exemple: (Lois classiques)

Nom	Paramètre(s)	Support	$\mathbb{P}(X=k)$	Exemple(s)
Loi de BERNOULLI	$p\in]0,1[$	$\{0,1\}$	$\mathbb{P}(X=1)=p$ $\mathbb{P}(X=0)=1-p$	Tirage dans une urne pile ou face biaisé.
Loi binômiale	$p\in]0,1[$ et $n\in\mathbb{N}^*$	$\{0,\dots,n\}$	$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	Nombre de succès pour n tirages avec remise.
Loi géométrique	$p\in]0,1[$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$	Temps du premier succès pour des tirages avec remise.
Loi uniforme	Un ensemble E fini de cardinal n	E	$\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{n}$	Phénomènes équiprobables.

Remarque:

Pour montrer que ce sont des lois de probabilité, il suffit de vérifier (hors-programme) que la somme des $P(X=k)$ pour *k* dans le support de la loi vaut 1.

Exemple:

On lance un dé bien équilibré à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 ou plus pour la première fois au 4e lancé ?

B. *Espérance, Variance*

Définition:

Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Son espérance, notée E(X) est le nombre $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)$.

Exemple:

Soit X la variable aléatoire discrète de loi uniforme sur {0, . . . , n} où $n \in \mathbb{N}^*$.

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i P(X=x_i) = \sum_{i=0}^{n} i \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \times \sum_{i=0}^{n} i = \frac{1}{n+1} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}$$

Propriété:

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et X une v.a. , alors $E(aX+b) = aE(X)+b$.

Démonstration:

Définition:

Soit X une variable aléatoire . Sa variance, notée V(X) est le nombre $V(X) = E[(X-E(X))^2]$.

Théorème: (de König-Huygens) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Démonstration:

Démontrer le théorème.

Propriété:

- Soit X une v.a. , alors $V(X)\geqslant 0$.
- Soit $a, b\in\mathbb{R}$ et X une v.a. , alors $V(aX+b)=a^2 V(X)$.

Propriété:

Soient X et Y deux v.a. indépendantes.

(i) $E(XY)=E(X)E(Y)$;

(ii) $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

Exemple: (Lois classiques)

Nom	Paramètre(s)	Espérance	Variance
Loi de Bernoulli	$p\in]0,1[$	p	$p(1-p)$
Loi binômiale	$p\in]0,1[$ et $n\in\mathbb{N}^*$	np	$np(1-p)$
Loi géométrique	$p\in]0,1[$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Loi uniforme	Un ensemble E fini de cardinal n	$\frac{n}{2}$	$\frac{n(n+2)}{12}$

V. Variables aléatoires continues

A. Lois

Remarque:

Dans le cas où Ω est une partie de $\mathbb{R}$, alors $T(\Omega)$ est l'ensemble des intervalles I de $\mathbb{R}$ du type $[a;b]$ ou $]-\infty;b]$ ou $[a;+\infty[$ ou $]-\infty;+\infty[$.

Définition:

On dit qu'une fonction *f* est une densité si *f* est définie, continue et positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et telle que $\int_I f_{(x)}dx=1$.

Si X est une variable aléatoire continue de densité *f* sur I avec $[a,b]\subset I$, la probabilité de l'événement $\{X \in [a, b]\}$ est égal à l'aire sous la courbe de *f* sur [a, b], soit :

$$P(X\in[a,b])=\int_a^b f_{(x)}dx.$$

Exemple: Soit $f_{(x)}=\frac{1}{8}x$ définie sur [0, 2].

- Montrer que *f* est une densité.
- Calculer $P(X\in[0{,}5;1])$.

Remarque:

Dans le cas d'une variable aléatoire continue, on a :

$$P(X=a)=\int_a^a f_{(x)}dx=0 \qquad \text{et} \qquad P(X\leqslant a)=P(X<a)$$

Notation:

1_A s'appelle la fonction indicatrice de A. Elle est définie par $1_A:\begin{cases}\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \begin{cases}1 \text{ si } x\in A\\ 0 \text{ si } x\notin A\end{cases}\end{cases}$.

Exemple: (Lois classiques)

Nom	Paramètre(s)	Support	Densité	Exemple(s)
Loi uniforme	$a, b \in \mathbb{R},\ a < b$	$[a, b]$	$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	Phénomènes équiprobables
Loi exponentielle	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	Durée de vie.
Loi normale	$m \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	Modéliser des petites erreurs ou variations aléatoires.

Remarque:

On vérifie (hors-programme) que l'intégrale de chaque densité sur $\mathbb{R}$ vaut 1.

B. *Espérance, Variance*

Définition:

Soit X une variable aléatoire continue ayant pour densité *f* sur l'intervalle [a, b] (avec a < b). Son espérance, notée E(X) est le nombre : $E(X)=\int_a^b x\times f_{(x)}\,dx$.

Remarque:

La définition de la variance reste la même que pour les variables aléatoires discrètes.

Les différentes propriétés sont les mêmes.

Démonstration:

Démontrer le théorème de König-Huygens dans le cadre d'une variable aléatoire continue.

Exemple: (Lois classiques)

Nom	Paramètre(s)	Espérance	Variance
Loi uniforme	$a, b \in \mathbb{R},\ a < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Loi exponentielle	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Loi normale	$m \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$	m	σ^2

VI. Exercices

<u>Exercice 1</u>:

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

Montrer que pour tout $s, t \in \mathbb{R}^+$, $P_{X>t}(X>s+t)=P(X>s)$. Cette propriété se traduit en disant que la variable aléatoire X est sans mémoire.

<u>Exercice 2</u>:

Les 100 passagers, d'un avion de 100 places, entrent dans l'appareil l'un après l'autre, dans l'ordre du numéro de leur carte d'embarquement (ex : le 4ème passager a réservé le siège numéro 4). Ils ont chacun une place réservée, mais la première personne à monter dans l'avion est une vieille folle qui s'assoit sur une place choisie au hasard de façon équiprobable.

Puis, chacun des autres, à son tour, va s'asseoir à sa place réservée si elle est encore libre ou, dans le cas contraire, s'installe au hasard et de façon équiprobable sur n'importe laquelle des places restantes.

➔ Quelle est la probabilité que le 100ème passager se soit finalement assis à sa place réservée ?

Indication : observer les cas $n=100$ et $n=1$ puis $n=99$, $n=98$,... et montrer, par récurrence forte, que cette probabilité vaut $\frac{1}{2}$ (*n* étant la place choisie par la vielle dame).

<u>Exercice 3</u>:

Soit n un entier naturel non nul. Dans un sac, on place $2n+1$ boules indiscernables au toucher et numérotées 0, 1, 2, . . . , 2*n*. On vide alors progressivement le sac jusqu'à n'y laisser qu'une seule boule, selon le protocole suivant :

- on tire trois boules simultanément ;
- si les trois boules tirées ont pour numéros *a*, *b* et *c*, avec $a<b<c$, on élimine les boules de numéros *a* et *c* et on replace dans le sac la boule de numéro *b* ;
- on recommence les opérations précédentes.

Au bout de *n* tirages, il ne reste plus qu'une seule boule, et on note D_n son numéro. Pour tout entier *k*, on note $P(D_n=k)$ la probabilité que la dernière boule restant dans le sac soit celle de numéro *k*.

1.
   a) Déterminer la loi de la v.a. D_1.
   b) Déterminer la loi de la v.a. D_2.
2. Déterminer $P(D_n=0)$ et $P(D_n=2n)$.
3. Déterminer $P(D_n=1)$ en fonction de n.
4. Soit i un entier tel que $0 \leqslant i \leqslant 2n$. Pourquoi a-t-on $P(D_n=i)=P(D_n=2n-i)$?
5. Calculer l'espérance de la v.a. D_n en fonction de n.

Exercice 4 :

Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

1. Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.
2. En réalité, la soirée était bien arrosée et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef .